

УДК 539.3

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ВЕРТЛУЖНОГО КОМПОНЕНТА ПРИ
ЭНДОПРОТЕЗИРОВАНИИ¹⁾****О.А. САЧЕНКОВ, Ю.Г. КОНОПЛЕВ***Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail Lenar.Sultanov@kpfu.ru; bishchumbek@gmail.com***MODELING THE BEHAVIOR OF THE ACETABULAR COMPONENT IN HIP****O.A. SACHENKOV, Yu.G. KONOPLEV***Kazan Federal University***Аннотация**

В статье представлен метод, позволяющий учитывать контактное взаимодействие между поверхностями на основе метода конечных элементов. Метод основан на итерационных циклах: определения статусов контактных элементов, обновления контактных усилий для выполнения условия нулевого проникновения всех активных контактных элементов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, контактное взаимодействие.

Summary

The paper presents a method to take into account the interaction between the contact surfaces on the basis of the finite element method. The method is based on iterative cycles, determine the status of the contact elements, update the contact forces for the condition of zero penetration of active contact elements.

Key words: finite element method, the contact interaction.

Введение

Учет контактного взаимодействия крайне важен и необходим в задачах промышленности, строительства, биомеханики. Сложность математической постановки контактной задачи, создает ряд затруднений для реализации его в численных методах [1–5]. Современные вычислительные мощности позволяют реализовать эту задачу на основе метода конечных элементов, существуют различные методики позволяющие учитывать такие взаимодействия [5–9]. В настоящее время остается актуальным вопрос реализации в численных дискретных моделях контактного взаимодействия, поиска областей контакта, зон отрыва. В статье рассматривается реализация метода расчета контактного взаимодействия поверхностей, когда контактирующая область найдена. Метод позволяет учитывать трение между поверхностями.

1. Определяющие соотношения.

Для оценки напряженно-деформируемого состояния важно учитывать контактное взаимодействие между имплантатом и костью, существуют различные подходы для реализации контактного взаимодействия [5]. На рис. 1 представлены свободные грани элементов целевой (А) и исходной (В) поверхностей. В ходе деформации исследуемой модели происходит движение точки исходной грани (точка D) относительно целевой грани. В процессе решения через воздействующую точку D строится репер: тангенциальные

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-97058, 13-01-97059, 14-01-31291)

вектора \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и нормаль \vec{n} . Пересечение нормали с целевой гранью происходит в точке C . При расчетах предполагается, что проникновение воздействующей точки в целевую грань проходит через точку C . Величина проникновения рассчитывается по формуле:

$$p = p_o + (u_H - u_T)n,$$

где p_o — начальное проникновение, u_H — перемещение точки D , u_T — перемещение точки C .

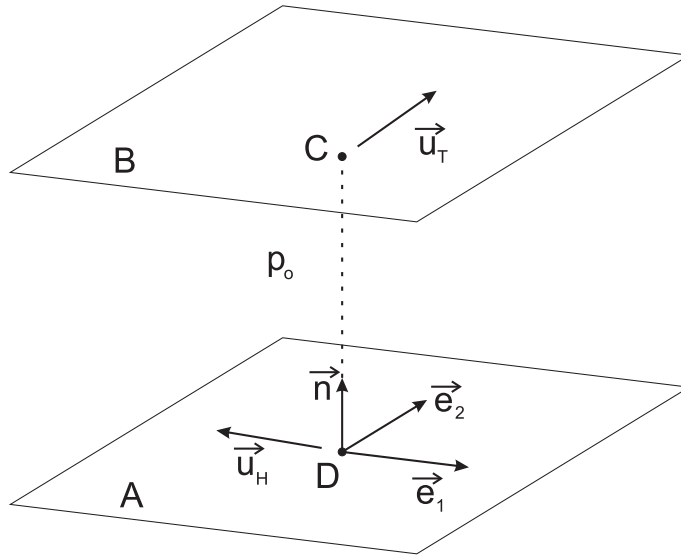


Рис. 1: Целевая и исходная поверхности

Это выражение определяется через интерполяционные функции для узлов исходной и целевой граней элементов и имеет вид

$$p = p_o + [q_n] \begin{pmatrix} u_H \\ u_T \end{pmatrix}$$

где $[q_n]$ — матрица-строка, состоящая из произведения интерполяционных функций на нормали, u_H , u_T — узловые перемещения исходной и целевой грани. Аналогично для тангенциального скольжения

$$\Delta\xi = \xi_0 + [q_t] \begin{pmatrix} u_H \\ u_T \end{pmatrix}$$

Для всех контактных элементов в матричном виде вышеуказанные выражения принимают вид

$$\begin{aligned} \{p\} &= [Q_n]\{U\} + \{P_0\} \\ \{\Delta\xi\} &= [Q_t]\{U\} + \{\xi_0\} \end{aligned}$$

Контактная жесткость определяется как

$$K = e \cdot E \cdot dA$$

Для учета сил Кулоновского трения имеем

$$|t_t| - t_n u = 0,$$

где t_t – сила трения u – коэффициент трения при $|t_t| < t_n u$ – поверхности сцеплены при $|t_t| = t_n u$ – скольжение контактирующих поверхностей относительно друг друга

Для решения линейного контактного взаимодействия используется расширенный метод Лагранжа. Удовлетворение условия линейного контакта (нулевое взаимопроникновение) достигается корректировкой контактных сил t на каждой итерации алгоритма линейного контакта в соответствии со следующим выражением:

$$t^j = t^{j-1} + \varepsilon p,$$

где t – контактная сила, p – текущее значение проникновения в точке, ε – штрафная жесткость.

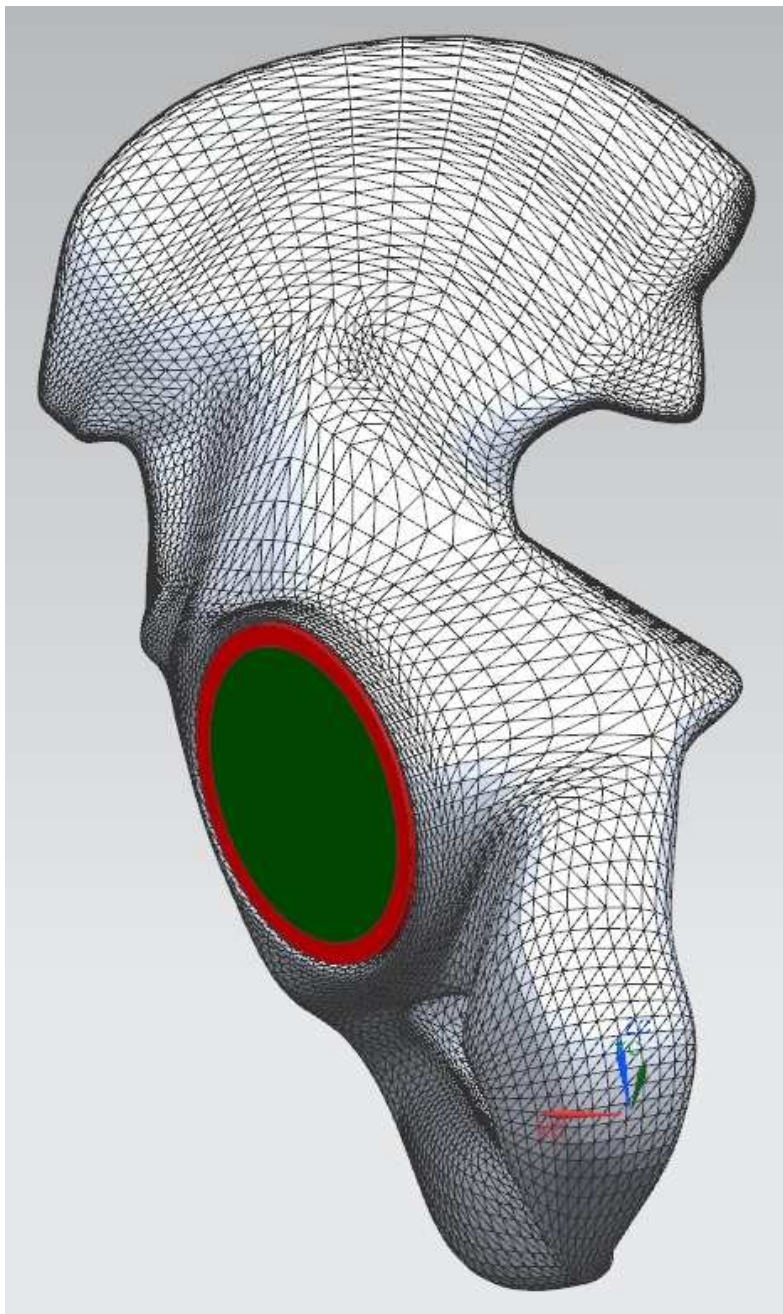


Рис. 2: Конечно-элементная модель сустава с ацетабулярным компонентом

2. Численный пример.

Для проведения численных исследований была построена трехмерная модель тазобедренного сустава, а также ацетабулярного компонента. На рис. 2 приведена построенная модель на которой моделировалась дисплазия (увеличение радиуса вертлужной впадины). В рамках расчетов учитывалась посадка в натяг ацетабулярного компонента в кость и контактное взаимодействие между ними с учетом трения.

Ацетабулярный компонент моделировался как двухкомпонентный объект, внешняя чашка титановая ($E = 112$ ГПа, $\nu = 0.3$), внутренняя чашка керамическая ($E = 102$ ГПа, $\nu = 0.26$). Характеристики кости $E = 6$ ГПа, $\nu = 0.3$, коэффициент трения между костной тканью и имплантатом 0.95.

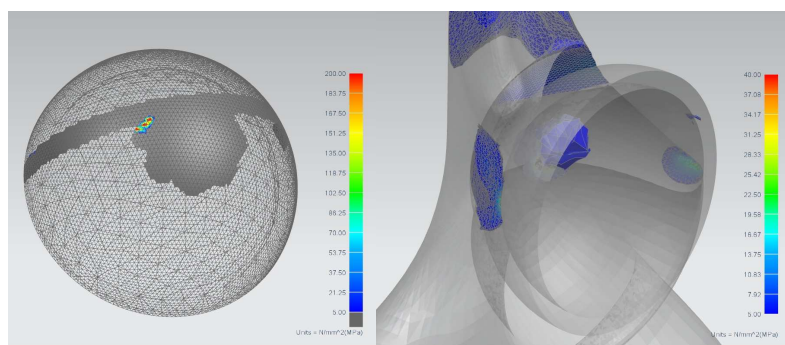


Рис. 3: Контактные напряжения

Диаметр чашки брался на 4 мм больше диаметра вертлужной впадины. К чашке прикладывалась сила, направленная по нормали, проводились расчеты под действием различных сил, на рис. 3 показано контактное давление под действием силы 1000 Н, с недопокрытием 30%. При этом имплантат сместился внутри чашки, то есть потерял несущую способность. Полученные результаты совпадают с экспериментальными и клиническими исследованиями в данной области [1, 2, 6].

3. Заключение.

На основании математического моделирования определены критические значения недопокрытия при различных величинах нагрузки, которые для пациента весом до 70 кг составляют 25% без винтов и 35% с дополнительной фиксацией винтами. Проведенный механический эксперимент подтвердил полученные в математической модели значения максимального недопокрытия вертлужного компонента, позволяющие избежать его раннего расшатывания.

Дополнительная фиксация винтами в 1.5–2 раза увеличивает прочность фиксации, что позволяет осуществить имплантацию вертлужного компонента с недопокрытием до 35% без выполнения опорной костной пластики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Егоров Д.Л., Кузнецов С.А.** Численно-аналитическое решение задачи контактного взаимодействия круглой пластины и штампов различных форм // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 11. – С. 36–39.
2. **Егоров Д.Л., Кузнецов С.А.** Исследование контактного взаимодействия круглых пластин со штампами на основе численно-аналитической методики // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 127–134.
3. **Zheng Z.J. and Yu J.L.** Using the Dugdale approximation to match a specific interaction in the adhesive contact of elastic objects // Journal of Colloid and Interface Science. – 2007. – 310(1). – P. 27–34.

4. **Greenwood J.A. and Williamson J.B.P.** Contact of nominally flat surfaces // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.* — 1966. — P. 300–319.
5. **Chaudhary A., Bathe K.J.** A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction // *Comput. Struct.* 1986. — V. 24. — P. 855–873.
6. **Aliabadi M.H., Martin D.** Boundary element hyper-singular formulation for elastoplastic contact problems // *Int. J. Numer. Methods Eng.* — 2000. — V. 48. — P. 995–1014.
7. **Балафендиева И.С., Бережной Д.В., Секаева Л.Р.** Исследование деформирования элементов транспортных сооружений, взаимодействующих с грунтом сложной физической природы // *Морские интеллектуальные технологии.* — 2011. — № 3. — С. 81–84.
8. **Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Султанов Л.У.** Моделирование деформирования обделки тоннеля метрополитена, расположенной в грунте сложной физической природы // *Вестник Казанского технологического университета.* — 2013. — Т. 16, № 9. — С. 250–255.
9. **Султанов Л.У., Давыдов Р.Л.** Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов // *Инженерно-строительный журнал.* — 2013. — № 9 (44). — С. 64–68.

REFERENCES

1. **Yegorov D.L., Kuznetsov S.A.** Numerically-analytical solution of the problem of contact interaction of a circular plate and stamps of various shapes [Численно-аналитическое решение задачи контактного взаимодействия круглой пластины и штампов различной формы] // *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta.* — 2013. — V. 16, № 11. — P. 36–39. (in Russian)
2. **Yegorov D.L., Kuznetsov S.A.** Investigation of contact interaction of circular plates with stamps on the basis of numerical and analytical techniques [Исследование контактного взаимодействия круглых пластин со штампами на основе численно-аналитической методики] // *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki.* — 2010. — V. 152, № 4. — P. 127–134. (in Russian)
3. **Zheng Z.J. and Yu J.L.** Using the Dugdale approximation to match a specific interaction in the adhesive contact of elastic objects // *Journal of Colloid and Interface Science.* — 2007. — V. 310(1). — P. 27–34.
4. **Greenwood J.A. and Williamson J.B.P.** Contact of nominally flat surfaces // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.* — 1966. — P. 300–319.
5. **Chaudhary A., Bathe K.J.** A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction // *Comput. Struct.* — 1986. — V. 24. — P. 855–873.
6. **Aliabadi M.H., Martin D.** Boundary element hyper-singular formulation for elastoplastic contact problems // *Int. J. Numer. Methods Eng.* — 2000. — V. 48. — P. 995–1014.
7. **Balafendiyeva I.S., Berezhnoy D.V., Sekayeva L.R.** A study of deformation elements of transportation structures interacting with soil complex physical nature [Исследование деформирования элементов транспортныkh сооружений, взаимодействующих с грунтом сложной физической природы] // *Morskiye intellektual'nyye tekhnologii.* — 2011. — № 3. — P. 81–84. (in Russian)
8. **Berezhnoy D.V., Sagdatullin M.K., Sultanov L.U.** Simulation of deformation of tunnel lining subway, located in the soil complex physical nature [Моделирование деформирования обделки тоннеля метрополитена, расположенной в грунте сложной физической природы] // *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta.* — 2013. — V. 16, № 9. — P. 250–255. (in Russian)
9. **Sultanov L.U., Davydov R.L.** Numerical study of large deformation finite element method [Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов] // *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal.* — 2013. — № 9 (44). — P. 64–68. (in Russian)